Efectes sobre l'individu: Desgraciadament, passa sovint que les dones matemàtiques establertes agafin gust a la seva situació d'excepcionalitat i vulguin mantenir-la. En el món de la investigació és poc freqüent que una dona treballi a gust amb collegues masculins i al mateix temps cregui fermament en la intel·ligència de les dones. Sense el treball conjunt (en equip amb els collegues), no tindrà valor per tirar endavant en la seva carrera científica, i sense la confiança en ella mateixa quedarà bloquejada.

Avui les dones ja no estan discriminades en la investigació. Si estan preparades per posar-se en la cursa internacional, són acceptades per la *scientific community* de la mateixa manera que els seus collegues masculins.

Utilitzar el potencial total

Les posicions de poder, en les quals es decideix la política científica i, per tant, es repartiexen els diners i els llocs de treball, estan ocupades exclusivament per homes. Els instituts d'elit, que estableixen les tendències de moda, romanen en mans d'homes. S'han fet diverses investigacions per tal de descobrir diferències específiques entre els dos sexes en l'eficiència matemàtica. L'estat actual de la investigació indica que si tals diferències existeixen, depenen de la cultura. Per poder comprendre els complexos problemes futurs del medi ambient i de l'economia, cal una comprensió de les estructures abstractes. Això s'ensenya mitjançant les matemàtiques. Com que la societat depèn del potencial mental de tothom, és urgentment necessari destruir els prejudicis i els estereotips sobre les matemàtiques com a disciplina *masculina*. L'estat normal només es pot assolir si la proporció de dones en tots els nivells de la jerarquia acadèmica augmenta.

El tetràedre, un gran desconegut

ANTONI GOMÀ NASARRE
Professor de matemàtiques a l'IES Joanot Martorell, Esplugues.

A la fase catalana de la XXXIII Olimpíada Matemàtica, en què vaig ser membre del tribunal, vam plantejar aquest problema:

- Amb dos filferros de 1996 cm de llarg cadascun, dos filferros de 1997 cm de llarg cadascun i dos filferros de 1998 cm de llarg cadascun es construeix un tetràedre, de manera que les sis arestes resulten ser tangents a una esfera. Raoneu en quina posició relativa hem situat les arestes.

Alguns companys de la docència em van dir que la redacció era «tendenciosa», i em van comentar que si bé era «fàcil» l'establiment de la condició necessària, trobaven «difícil» concretar-ne la suficiència.

Mai se sap, però, què és fàcil i què és difícil. Vaig poder constatar entre l'alumnat que participava a la contesa que la Geometria (deixeu-m'ho posar en majúscula!) és la gran desconeguda, la gran absent dels plans d'estudi encara vigents. Com, si no, es pot entendre que bona part dels participants, que ben segur dominen les tècniques de la geometria analítica, no sabessin què és un tetràedre?

Aquestes dues reflexions em van portar enrere en el temps, cap a l'any 1983. Quan els alumnes i les alumnes de COU encara no vivien obsessionats per la Selectivitat vaig tenir la immensa sort de despertar el cuc de la geometria en un grup d'alumnes de l'Institut de Batxillerat de Tortosa, que van elaborar un treball presentat i premiat en la convocatòria de 1983 dels premis CIRIT.[1]

En la introducció del treball els autors deien: «Aquest treball sorgeix d'alguns dels interrogants que se'ns van plantejar al llarg de les classes de geometria de COU, i està dedicat a la geometria del tetràedre i, més concretament, se centra en l'estudi dels seus punts notables. S'intenta generalitzar a tres dimensions allò que és més conegut per al triangle, les qüestions que fan referència a punts notables.»

[1] *Traient suc d'un tetràedre: Estudi dels punts notables d'un tetràedre.* **Autors**: Joan Bertomeu, Lluís Borràs, Lluís Caballol, Maria Gas i Àngels Miralles, que van estudiar, respectivament, física, enginyeria, dret, veterinària i enginyeria. Aquest treball ja fou comentat en un article de *Papers de batxillerat*, revista del Departament d'Ensenyament, 1984.

Un d'aquests «interrogants» va ser un problema que apareix en molts textos de COU:

- Demostreu que si en un tetràedre dos parells d'arestes oposades són ortogonals, també té aquesta propietat l'altre parell d'arestes oposades.

En aquest article comentaré el treball i algunes de les proposicions que hi apareixien, i indicaré que *abans* de les tècniques analítiques (o conjuntament amb elles) hi ha moltes altres possibilitats a considerar, i que sempre, tal com van fer els autors de l'article, cal buscar la interpretació geomètrica per copsar millor allò que es vol calcular. És així que, a partir del problema que acabo d'enunciar, va néixer un treball ben interessant.

Baricentre

- Les *mitjanes* d'un tetràedre són les rectes que van de cada vèrtex al baricentre de la cara oposada.

- Les quatre mitjanes d'un tetràedre es tallen en un punt, que s'anomena *baricentre* del tetràedre. Les coordenades del baricentre d'un tetràedre es poden trobar sumant les coordenades del vèrtexs i dividint per 4.

- El baricentre divideix les mitjanes per la quarta part: la distància del baricentre a un vèrtex és el triple que la distància del baricentre del tetràedre al baricentre de la cara oposada.

Per a la demostració d'aquesta darrere proposició els autors feien servir recursos analítics. Si A, B, C, D són els vèrtexs del tetraèdre, es pot escollir una referència de l'espai afí prenent A com a origen, i $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$ com a base de $\mathbb{R}^3$. En aquesta referència es comprova que totes les mitjanes del tetràedre passen pel punt $(1/4, 1/4, 1/4)$, que és, doncs, el baricentre G del tetràedre. Per altra banda, si designem com a A' el baricentre de la cara oposada al vèrtex A, es comprova de seguida que $\vec{AG} = 3\vec{GA'}$, i queda demostrada la proposició (sense cap necessitat de fer servir la fórmula de la distància!).

Circumcentre i incentre

- Entenem per *circumcentre* d'un tetràedre el centre de l'esfera circumscrita al tetràedre. El circumcentre és, doncs, un punt que és a la mateixa distància dels quatre vèrtexs del tetràedre.

- Entenem per *incentre* d'un tetràedre el centre de l'esfera inscrita al tetràedre, tangent a les quatre cares. L'incentre és un punt interior al tetràedre, que és a la mateixa distància de les quatre cares.

Per a la demostració de l'existència d'incentre i de circumcentre només cal fer un raonament discursiu, sense cap fórmula, tot pensant quin és el conjunt de punts que equidisten de dos o tres vèrtexs (o cares) del tetràedre.

Ortocentre

- Entenem per *altures* del tetràedre les rectes que passen per cada vèrtex i són perpendiculars a la cara oposada.

- Anomenem *ortocentre* del tetràedre aquell punt, si existeix, on es tallen les quatre altures del tetràedre.

L'observació i el càlcul d'exemples ens fan veure de seguida que no tots els tetràedres tenen ortocentre. La proposició següent mostra com es poden caracteritzar els tetràedres ortocèntrics.

- Les condicions següents són equivalents:

  a) Una de les altures del tetràedre passa per l'ortocentre de la cara oposada.

  b) Les tres parelles d'arestes oposades del tetràedre són ortogonals.[2]

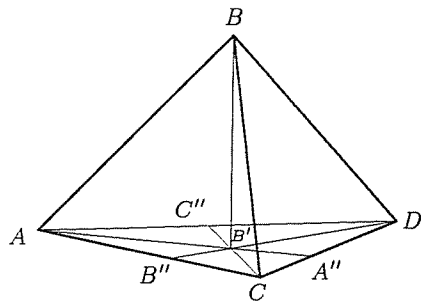
  c) El tetràedre té ortocentre; és a dir, les quatre altures concorren en un punt.

Transcric seguidament la demostració d'aquesta proposició perquè em sembla un bon exemple de *manipulació* de la definició de *perpendicularitat de recta i pla a l'espai.*

Vegem que $a) \Rightarrow b)$. Suposem que l'altura que parteix del vèrtex B passa per l'ortocentre de la cara ACD; sigui aquest el punt B' (figura

[2] El problema que hem comentat demostra que aquesta condició és equivalent a (b'): dues parelles d'arestes oposades del tetràedre són ortogonals.

[1]). Siguin AA'', CC'', DD'' les altures del triangle ACD.



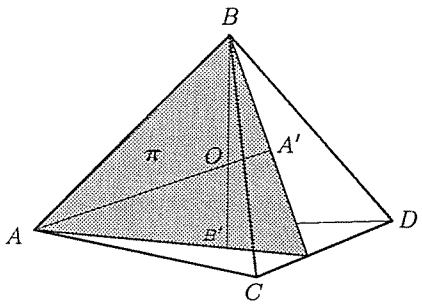
[1]

Recordem que una recta és perpendicular a un pla si i només si és ortogonal a totes les rectes del pla, i per què això succeeixi, basta que ho sigui a dues de les rectes del pla.

Com que BB' és perpendicular a ACD, tenim que $BB' \perp CD$, i com que també $AA'' \perp CD$, resulta que el pla ABB' és perpendicular a CD. Però llavors la recta AB, que és del pla ABB' és ortogonal a CD.

De manera semblant raonaríem amb les altres parelles d'arestes oposades.

Vegem ara que $b) \Rightarrow c)$. Efectivament, si $CD \perp AB$, existeix un pla π que passa per AB i és perpendicular a CD (figura [2]). No està de més observar que, donades dues rectes qualsevol, no sempre existeix un pla que passi per una d'elles i sigui perpendicular a l'altra. És la condició $CD \perp AB$, que és la nostra hipòtesi $b)$ la que permet construir aquest pla.



[2]

No costa gaire de veure que el pla π és perpendicular als plans ACD i BCD. Aquest pla π, doncs, conté les altures AA' i BB' del tetràedre, i, com que evidentment no poden ser paral·leles, es tallaran.

Fent això amb cada parell d'arestes oposades, les quals són ortogonals per hipòtesi, veiem que les quatre altures del tetràedre es tallen totes de dues en dues. Com que són quatre rectes que no poden ser coplanàries, forçosament es tallaran totes en un punt: l'ortocentre O.

Vegem finalment que $c) \Rightarrow a)$. Prenem l'altura del tetràedre que passa per A i la que passa per B (figura [2]). Sigui O el punt de tall, que és l'ortocentre del tetràedre. En el pla ABO hi són contingudes les dues altures considerades AA' i BB'. Com que $AA' \perp BCD$, resulta $AA' \perp CD$. Com que $BB' \perp ACD$, resulta $BB' \perp CD$.

Així, veiem que la recta CD és ortogonal a dues de les rectes del pla ABO i, per tant, ho és a qualsevol de les rectes d'aquest pla. En particular, doncs, $CD \perp AB'$.

Semblantment es pot veure que $AD \perp CB'$ i que $AC \perp DB'$.

De tot això resulta que les rectes AB', CB' i DB' són les altures del triangle ACD i, per tant, B' és l'ortocentre de la cara ACD, cosa que volíem veure.

Observeu que aquest raonament, vist en conjunt, demostra que si una de les altures del tetràedre passa per l'ortocentre de la cara oposada, això mateix és cert per a qualsevol de les altures. No us sembla sorprenent? Si prenem un triangle i pel seu ortocentre elevem una perpendicular al pla del triangle, un punt qualsevol d'aquesta recta *serveix* com a quart vèrtex d'un tetràedre a fi que tingui ortocentre, i llavors qualsevol de les quatre cares del tetràedre en qüestió compleix la mateixa propietat que ens ha servit per construir-lo!

L'elecció d'una referència adequada i l'aplicació de la proposició anterior permet demostrar sense cap problema (a part de la paciència necessària per portar a terme els càlculs) la proposició següent:

- Si un tetràedre té ortocentre, el baricentre és el punt mitjà del segment que uneix l'ortocentre i el circumcentre. Per tant, aquests tres punts estan alineats.

Filcentre

Quan hom intenta generalitzar per als tríedres el concepte de bisectriu d'un angle pla, en el sentit de *lloc geomètric dels punts que equidisten dels costats d'un angle*, es troba amb una doble possibilitat:

$a)$ Considerar el lloc geomètric dels punts que equidisten de les tres cares concurrents en el vèrtex considerat.

b) Considerar el lloc geomètric dels punts que equidisten de les tres arestes concurrents en el vèrtex considerat.

Cadascun dels dos llocs geomètrics esmentats és una recta, però, en general, les dues rectes no coincideixen.

Si en un tetràedre considerem les quatre rectes del tipus *a*), es tallen sempre en un punt, l'incentre del tetràedre, de què ja hem parlat.

Les rectes *b*) s'obtenen com a intersecció dels plans que passen per les bisectrius dels angles de les cares, i són perpendiculars a les cares. El vector director d'una d'aquestes rectes forma el mateix angle amb els tres vectors directors de les arestes concurrents en aquell vèrtex.

Si en un tetràedre es dóna el cas que les quatre rectes *b*) es tallen en un punt, aquest punt equidistarà de les sis arestes del tetràedre. La part final del treball que es comenta en aquest article caracteritza els tetràedres que compleixen aquesta condició.

- Anomenarem *filcentre*[3] d'un tetràedre el centre d'una esfera tangent a les sis arestes.
- El filcentre, si existeix, és un punt situat a la mateixa distància de les sis arestes del tetràedre.
- Si un tetràedre $ABCD$ té filcentre,[4] es compleix que les sumes de les longituds de les parelles d'arestes oposades coincideixen, és a dir, $AB + CD = AC + BD = AD + BC$.

Si l'esfera és tangent a les tres arestes concurrents en A, serà tangent en tres punts situats a la mateixa distància del punt A. Semblantment passarà en els vèrtexs B, C, D.

Podem assegurar, doncs, l'existència de longituds x, y, z, t que compleixen

$$\begin{cases} AB = x + y \\ AC = x + z \\ AD = x + t \\ BC = y + z \\ BD = y + t \\ CD = z + t \end{cases}$$

Com que el rang de la matriu del sistema anterior és 4, la condició necessària i suficient per què tingui solució és que el rang de la matriu ampliada sigui també 4. Aquesta condició es compleix si i només si $AB + CD = AC + BD = AD + BC$, cosa que demostra l'enunciat.

Per a l'establiment de la suficiència de la condició per l'existència de filcentre, els autors del treball consideren el lema següent:

- (Lema del peu de l'altura) Si P és un punt del costat BC d'un triangle ABC tal que $AB^2 - BP^2 = AC^2 - PC^2$, llavors P és el peu de l'altura sobre el costat BC.

En el treball que es comenta, aquest lema es demostrava com una conseqüència del teorema del cosinus aplicat als triangles APB i APC. És clar que en les condicions de l'enunciat serà

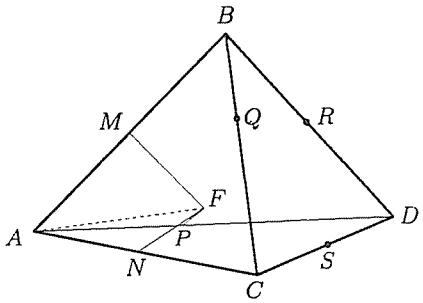
$$AB^2 - BP^2 = AC^2 - PC^2 = AP^2.$$

- La condició de coincidència entre les sumes de les longituds de les arestes oposades d'un tetràedre és suficient per poder assegurar l'existència de filcentre.

Si suposem que es compleix $AB + CD = AC + BD = AD + BC$, podrem trobar uns valors únics de les longituds x, y, z, t que compleixin el sistema plantejat més amunt, perquè aquesta és la condició necessària i suficient perquè l'esmentat sistema sigui compatible determinat.

Aquestes longituds ens permetran determinar (figura [3]) punts M, N, P, Q, R, S sobre les arestes que compleixen:
$AM = AN = AP = x, BM = BQ = BR = y,$
$CN = CQ = CS = z, DP = DR = DS = t.$

Tracem ara pels punts M, N, P els plans respectivament perpendiculars a AB, AC, AD. Aquests tres plans tenen un punt en comú (pel fet de ser perpendiculars a tres vectors independents). Sigui F aquest punt.



[3]

[3] Aquesta denominació la suggereixen els autors del treball tot pensant en un tetràedre que només tingués les sis arestes, «de filferro», cosa que els ajuda a imaginar-se aquesta hipotètica esfera tangent a les sis arestes.

[4] Aquesta és, justament, la hipòtesi del problema plantejat a l'Olimpíada.

Les rectes FM, FN, FP seran perpendiculars, respectivament, a les arestes AB, AC, AD, i com que FAM, FAN, FAP són tres triangles rectangles iguals, coincidiran les distàncies $FN = FM = FP = f$.

Si ara prenem els triangles FMB i FNC, que també són rectangles, tindrem $FB^2 = f^2 + BM^2$ i $FC^2 = f^2 + CN^2$.

La manera de determinar els punts M, N, Q, que compleixen $CN = CQ$ i $BM = BQ$, ens permetrà escriure $FB^2 = f^2 + BQ^2$ i $FC^2 = f^2 + CQ^2$ i, per tant, podrem aplicar el lema del peu de l'altura al triangle FCB i al punt Q sobre el costat CB, per deduir que la recta FQ és perpendicular a CB, i, com que $FB^2 - BQ^2 = FC^2 - CQ^2 = f^2$, sabrem que la longitud del segment FQ és f. Així, resulta que el punt F, que, per construcció, equidista de les tres arestes del tetràedre concurrents en A, és a aquesta mateixa distància de l'aresta BC.

Igualment es pot raonar amb les altres arestes del tetràedre per concloure que F és, realment, el filcentre del tetràedre.

Diré, com a comentari final, que després de l'intens i interessant treball teòric que havien desenvolupat, els autors van completar-lo amb un programa informàtic escrit en el llenguatge BASIC del ZX-81 —recordeu que el treball va ser elaborat l'any 1983—, per tal de determinar les coordenades dels punts notables d'un tetràedre (després de comprovar-ne l'existència, quan escau) a partir de les coordenades dels vèrtexs. Ben segur que estareu d'acord amb mi que va ser una immensa sort, com a professor, poder orientar una mica el desenvolupament d'aquest treball.

Cangur-97. Crònica

El dia 4 d'abril de 1997 es van celebrar les proves **Cangur** en la seva segona convocatòria catalana, organitzades per la Societat Catalana de Matemàtiques, amb la inestimable i mai prou agraïda col·laboració de molts professors i professores d'arreu de Catalunya. Esperem que les dades que incloem tot seguit us seran útils. Si desitgeu estadístiques més completes, només cal que ho demaneu a la societat.

En aquesta convocatòria es van inscriure un total de 2588 alumnes corresponents a 130 centres (39 de la ciutat de Barcelona, 48 de les comarques de Barcelona, 14 de la província de Tarragona, 14 de la província de Lleida i 14 de la província de Girona)

El nombre de participants va ser de 2110, que van realitzar la prova en 36 centres receptors, escollits de manera que minimitzessin els desplaçaments però, alhora, donessin idea de *festa col·lectiva* que és la idea que volem que s'associï, cada vegada més, al **Cangur**.

- Procedència geogràfica:

  653 alumnes de la ciutat de Barcelona, 652 de la resta de la província de Barcelona, 254 de la província de Lleida, 225 de Tarragona i 326 de Girona.

- Distribució per nivells:

  666 de primer, 696 de segon, 473 de tercer, 275 de COU.

A la secció de **Premis**, hi teniu la relació de guanyadors i guanyadores, però és interessant veure la concordança amb la distribució geogràfica de participants. Podeu comprovar que els 41 premis corresponen a 16 alumnes de la ciutat Barcelona, 9 de les comarques de Barcelona, 4 a les de Tarragona, 6 a les de Lleida i 6 a les de Girona.

- **Centres amb més participants:**

  Institut Vicens Vives (Girona), 87.

  Aula Escola Europea (Barcelona), 76.

  Salvador Espriu (Salt-Gironès), 73.

  Escola Pia Santa Anna (Mataró-Maresme), 65.

  IES les Corts (Barcelona), 52.

- **Puntuacions per terços.** El **Cangur** és una prova on es plantegen 30 enunciats amb opcions tancades de resposta en un temps relativament curt, una hora i un quart. Les preguntes s'agrupen en tres terços, de dificultat creixent. En el primer terç (preguntes de l'1 al 10) es considera que cada participant comença amb 7,5 punts; una resposta encertada dóna 3 punts i una errada resta 3/4 de